



الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الوحدة التاسعة

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1444 هـ - 2022 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.



الطبعة التجريبية ٢٠٢٢ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 –
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 و Probability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلرز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه





المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-



حضرة صاحب الجلالـة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-


مدونه
سلطنة عمان
التعليمية

سلطنــــة عُمـــان

(المحافظات والولايات)




مدونه
سلطنة عمان
التعليمية





النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء


مدونه
سلطنة عمان
التعليمية

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدَّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم


مدونه
سلطنة عمان
التعليمية

المحتويات




مدونة
سلطنة عمان
التعليمية

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★، ★، ★ أو ★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم. يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

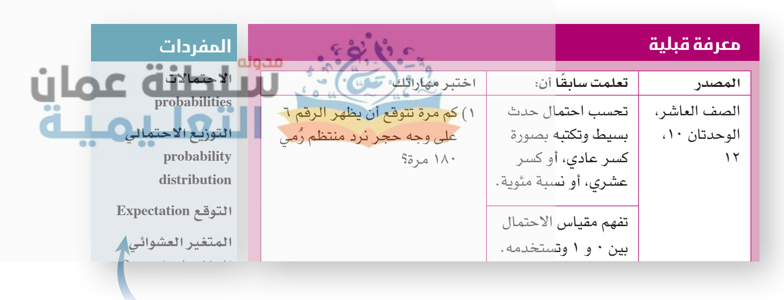
ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٩-١ تستخدم التباديل والتوافيق في إيجاد الاحتمالات.

٩-٢ تنشئ جدول التوزيع الاحتمالي المتعلق بموقف معيّن يتضمن متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (س).

٩-٣ تحسب التوقع ت(س)، والتباين ع^2(س)، والانحراف المعياري ع(س) لمتغير عشوائي منفصل.

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.



معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدتان ١٠، ١٢	تحسب احتمال حدث بسيط وتكتبه بصورة كسر عادي، أو كسر عشري، أو نسبة مئوية.	١) كم مرة تتوقع أن يظهر الرقم ٦ على وجه حجر نرد منتظم رُمي ١٨٠ مرة؟
	تفهم مقياس الاحتمال بين ٠ و ١ وتستخدمه.	

المفردات

الاحتمالات probabilities

التوزيع الاحتمالي probability distribution

التوقع Expectation

المتغير العشوائي

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

نتيجة ٢

التوزيع الاحتمالي يبيّن جميع قيم المتغير العشوائي المنفصل (س) الممكنة، وأن مجموع الاحتمالات ∑ ل (س) = ١

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

الاحتمالات

probabilities

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

مثال ١

على رفّ ١٥ علبة لم يوضع اسم المحتوى لأيّ منها، لكن نعرف أن ٨ منها تحتوي على حساء، و٤ منها تحتوي على فاصولياء، و٣ تحتوي على بازلاء.

إذا اخترت ٧ علب عشوائيًا بدون إعادة، فأوجد احتمال أن يكون ٥ منها تحتوي على الحساء.

الحل:

ليكن أ هو حدث اختيار ٥ علب حساء من ٧ علب.

الاختيارات المفضلة هي ٥ علب حساء و٢ لا تحتويان على الحساء.

عدد التوافيق المفضلة: $\binom{8}{5} \times \binom{7}{2}$ ← اختيار ٥ علب من بين ٨ علب من الحساء واختيار علبتَين من الأنواع الأخرى.

عدد التوافيق الممكنة: $\binom{15}{7}$ ← اختيار ٧ علب من ١٥علبة.

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

استكشف ١

حدّد ما إذا كانت العبارات أدناه، حيث أ، ب، ∈ ع:

صحيحة دائمًا — صحيحة أحيانًا — لا تصح أبدًا

١) |أ + ب| = |أ| + |ب|

٢) |أ − ب| = |أ| − |ب|

٣) |أ − ب| = |ب − أ|

٤) |أ ب| = |أ| × |ب|

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

مُساعَدة

إذا أمكن للمتغير (س) أن يأخذ قيمًا محددة وقابلة للعد يسمى متغيرًا عشوائيًا منفصًل.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يأخذ المتغيّر العشوائي المنفصل قيمًا محددة وقابلة للعد.
- التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المنفصل هو عرض لجميع القيم الممكنة واحتمالاتها المناظرة.
- للمتغيّر العشوائي المنفصل (س)، حيث ٠ $\leqslant$ ل(س) $\leqslant$ ١ يكون:
  - $\sum$ل(س) = ١
  - ت(س) = $\sum$س ل(س)
  - ع^{٢}(س) = $\sum$س^{٢} ل(س) − (ت(س))^{٢}
  - ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^{٢}\text{(س)}}$

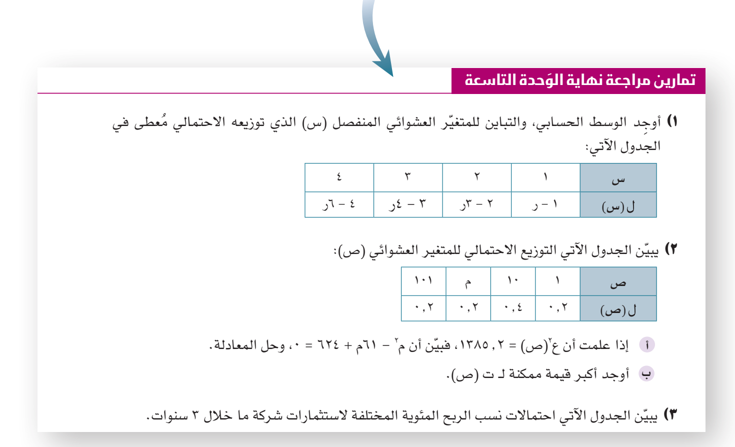
عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- ★ (أحمر) تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ (بنفسجي) تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ (أخضر) تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ (أصفر) تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ (أزرق) هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.



تمارين مراجعة نهاية الوَحدة التاسعة

١) أوجِد الوسط الحسابي، والتباين للمتغيّر العشوائي المنفصل (س) الذي توزيعه الاحتمالي مُعطى في الجدول الآتي:

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	١ − ر	٢ − ٣ر	٣ − ٤ر	٤ − ٦ر

٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (ص):

ص	١	١٠	م	١٠١
ل(ص)	٠,٢	٠,٤	٠,٢	٠,٢

أ) إذا علمت أن ع^{٢}(ص) = ١٣٨٥,٢، فبيّن أن م^{٢} − ٦١م + ٦٢٤ = ٠، وحل المعادلة.

ب) أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ ت(ص).

٣) يبيّن الجدول الآتي احتمالات نسب الربح المئوية المختلفة لاستثمارات شركة ما خلال ٣ سنوات.

www.oman-edu.com غمان التعليمية



الوحدة التاسعة

التوزيع الاحتمالي

Probability distributions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٩-١ تستخدم التباديل والتوافيق في إيجاد الاحتمالات.

٩-٢ تنشئ جدول التوزيع الاحتمالي المتعلق بموقف معيّن يتضمن متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (س).

٩-٣ تحسب التوقع ت(س)، والتباين ع^{٢}(س)، والانحراف المعياري ع(س) لمتغير عشوائي منفصل.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدتان ١٠، ١٢	تحسب احتمال حدث بسيط وتكتبه بصورة كسر عادي، أو كسر عشري، أو نسبة مئوية.	١) كم مرة تتوقع أن يظهر الرقم ٦ على وجه حجر نرد منتظم رُمي ١٨٠ مرة؟
	تفهم مقياس الاحتمال بين ٠ و ١ وتستخدمه.	
	تفهم أن التكرار النسبي هو تقدير للاحتمال.	٢) ما احتمال أن يكون مجموع الرقمَين الظاهرَين على وجهَي حجرَي نرد منتظمَين يساوي ٤؟
	تحسب احتمال أحداث مركبة بسيطة باستخدام مخطط الفضاء الاحتمالي ومخطط الشجرة حيث يكون مناسبًا.	
الصف التاسع، الوحدة ٩	تصِف العلاقات بين المجموعات وتمثلها باستخدام اللغة والرموز ومخططات ڤن.	٣) إذا علمت أن ا = {١، ٢، ٥}، بَ′ = {٢، ٤، ٥}، ا′ = {٣، ٤}. فاستخدم مخطط ڤن أو مخطط الفضاء الاحتمالي لتجد ع(ا ∪ ب′)، ع(ا′ ∪ ب).

المفردات

الاحتمالات
probabilities

التوزيع الاحتمالي
probability distribution

التوقع Expectation

المتغير العشوائي المنفصل Discrete random variable

لماذا ندرس التوزيع الاحتمالي؟

درست سابقًا التباديل والتوافيق واستخدمتها لتحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار فريق ما أو لوضع عناصر في ترتيب معيّن.

في هذه الوحدة، سوف تقوم بتوسيع هذه الأفكار حتى تتمكن من حساب **احتمالات probabilities** وقوع أحداث مختلفة.

٩-١ استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات

درست سابقًا طرقًا مختلفة لحساب الاحتمالات، وفي هذا الدرس ستتعلم طرقًا أخرى لحسابها باستخدام التباديل والتوافيق كما هو مبيّن في نتيجة ١:

تذكير

من الوحدة ٨ نعرف أن ترتيب الاختيار في التباديل مهم، ولكنه غير مهم في التوافيق.

نتيجة ١

إذا كان حدث ما مكونًا من عدد من التباديل أو التوافيق المفضلة المتساوية الاحتمال، فإن احتمال وقوع الحدث يكون:

ل(أ) = $\frac{\text{عدد التباديل المفضلة}}{\text{عدد التباديل الممكنة}}$ ، حيث أ الحدث المفضل

أو

ل(ب) = $\frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}}$ ، حيث ب الحدث المفضل

مثــال ١

على رفّ ١٥ علبة لم يوضع اسم المحتوى لأيّ منها، لكن نعرف أن ٨ منها تحتوي على حساء، و٤ منها تحتوي على فاصولياء، و٣ تحتوي على بازلاء.

إذا اختيرت ٧ علب عشوائيًا بدون إعادة، فأوجد احتمال أن يكون ٥ منها تحتوي على الحساء.

الحــلّ:

ليكن أ هو حدث اختيار ٥ علب حساء من ٧ علب.

الاختيارات المفضلة هي ٥ علب حساء و٢ لا تحتويان على الحساء.

عدد التوافيق المفضلة: $\binom{٨}{٥} \times \binom{٧}{٢}$ ...... اختيار ٥ علب من بين ٨ علب من الحساء واختيار علبتيَن من الأنواع الأخرى.

عدد التوافيق الممكنة: $\binom{١٥}{٧}$ ...... اختيار ٧ علب من ١٥علبة.

ل(أ) = $\frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}} = \frac{\binom{٨}{٥} \times \binom{٧}{٢}}{\binom{١٥}{٧}}$

= $\frac{٥٦ \times ٢١}{٦٤٣٥}$ = ٠,١٨٣ (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

مثـال ٢

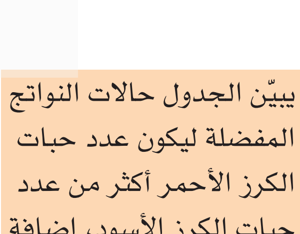
في علبة طعام لطالبة ١٣ حبة كرز أحمر، و٧ حبات كرز أسود. إذا أخذت الطالبة ٥ حبات كرز عشوائيًا، فأوجِد احتمال أن تكون قد أخذت كرزًا أحمر أكثر من الكرز الأسود.

الحـلّ:

ليكن أ هو حدث أخذ الكرز الأحمر أكثر من الكرز الأسود عند أخذ ٥ حبات كرز.



	من ١٣ حبة كرز أحمر	من ٧ حبات كرز أسود	عدد الطرق
	٥	٠	$\binom{١٣}{٥} \times \binom{٧}{٠} = ١٢٨٧$
أو	٤	١	$\binom{١٣}{٤} \times \binom{٧}{١} = ٥٠٠٥$
أو	٣	٢	$\binom{١٣}{٣} \times \binom{٧}{٢} = ٦٠٠٦$
			المجموع = ١٢٢٩٨



يبيّن الجدول حالات النواتج المفضلة ليكون عدد حبات الكرز الأحمر أكثر من عدد حبات الكرز الأسود، إضافة إلى عدد الطرق الممكنة لاختيارها.

عدد التوافيق الممكنة (عدد الطرق) = $\binom{٢٠}{٥}$ = ١٥٥٠٤ طريقة

اختيار ٥ حبات من ٢٠ حبة كرز.

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}} = \frac{\binom{١٣}{٥}\times\binom{٧}{٠} + \binom{١٣}{٤}\times\binom{٧}{١} + \binom{١٣}{٣}\times\binom{٧}{٢}}{\binom{٢٠}{٥}}$$

$$= \frac{١٢٢٩٨}{١٥٥٠٤} = ٠{,}٧٩٣$$ (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

تذكير

تذكّر أن

ل (أ أو ب أو ج) =

ل (أ ∪ ب ∪ ج) =

ل (أ) + ل (ب) + ل (ج)

للأحداث المتنافية.

مثـال ٣

حافلة ركاب صغيرة تحتوي على مقعد للسائق (س) ومقاعد لسبعة ركاب كما هو مبيّن.

الجهة الثانية

س

الجهة الأولى

إذا جلس سبعة ركاب بترتيب عشوائي، فأوجد احتمال أن يجلس راكبان:

أ في الجهة نفسها من الحافلة.

ب في جهتين مختلفتَين من الحافلة.

الحـلّ:

أ هو حدث جلوس الراكبين في الجهة نفسها.

ب هو حدث جلوس الراكبين في جهتين مختلفتين.

أ هناك احتمالان مختلفان للنتيجة المفضلة:

$^{٣}ل_{٢}$ طريقة .... يجلس الراكبان في جهة السائق (الجهة الثانية).

$^{٤}ل_{٢}$ طريقة .... يجلس الراكبان في الجهة الأخرى من السائق (الجهة الأولى).

العدد الإجمالي للنواتج هو $^{٧}ل_{٢}$ طريقة .... يجلس الراكبان على أيّ مقعدَين من المقاعد السبعة.

ل(أ) = ل(يجلس الراكبان في جهة السائق) + ل(يجلس الراكبان في الجهة الأخرى من السائق).

$$= \frac{^{٣}ل_{٢}}{^{٧}ل_{٢}} + \frac{^{٤}ل_{٢}}{^{٧}ل_{٢}}$$

$$= \frac{٦}{٤٢} + \frac{١٢}{٤٢}$$

$$= \frac{٣}{٧}$$

ب $ل(ب) = \frac{^{٣}ل_{١} \times {}^{٤}ل_{١} + {}^{٤}ل_{١} \times {}^{٣}ل_{١}}{^{٧}ل_{٢}}$

$$= \frac{١٢ + ١٢}{٤٢} = \frac{٢٤}{٤٢} = \frac{٤}{٧}$$

طريقة بديلة:

$ل(ب) = ١ - ل(أ) = ١ - \frac{٣}{٧} = \frac{٤}{٧}$ .... الحدثان 'يجلسان في جهتين مختلفتين من الحافلة' و 'يجلسان في الجهة نفسها من الحافلة' متتامان.

تذكير

ل(أ′) = ١ − ل(أ) حيث أ، أ′ حدثان متتامان.

تمارين ٩-١

١) اختير طفلان عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من ستة أولاد وأربع بنات. استخدم التوافيق لتجد احتمال أن يكون الطفلان:

أ ولدَين ب بنتَين ج بنتًا وولدًا

٢) اختيرت أربع حبات موز عشوائيًا من صندوق يحتوي على ١٧ حبة موز صفراء اللون و ٢٣ حبة موز خضراء اللون. أوجِد احتمال:

أ أن لا توجد حبات موز خضراء ب أقل من نصف الحبات المختارة خضراء.

٣) يختار أمين أحد المعارض عشوائيًا ثماني قطع للعرض من بين ٣٦ لوحة تشكيلية و ٤٤ لوحة فنية. أوجِد احتمال أن يتضمن العرض على الأقل ثلاث لوحات تشكيلية أكثر من اللوحات الفنية.

٤) في صندوق للأدوات الصناعية ٢٥ مفكًا، و ١٦ رأس مثقاب، و ٣٨ مفتاحًا، و ١١ إزميلًا. أوجِد احتمال اختيار أربع أدوات ليس من بينها أيّ إزميل.

٥) يزرع حمد ٩ شُجيرات في حديقة منزله في صف واحد عشوائيًا: ٣ منها تزهر ورودًا حمراء، و ٦ تزهر ورودًا صفراء. احسب احتمال أن:



أ تقع شجيرة منها تزهر وردة صفراء في المنتصف.

ب لا تكون الشجيرات الثلاث التي تزهر ورودًا حمراء متباعدة.

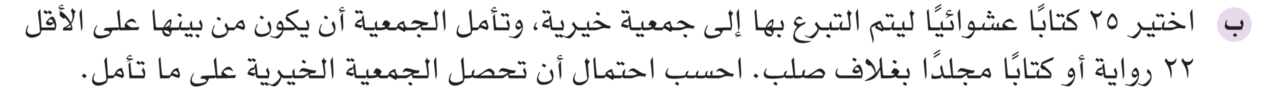
ج لا تكون الشجيرتان اللتان تزهران ورودًا حمراء متجاورتَين.

٦) مجموعة من ١٨٠ شخصًا، تضم ٨٨ رجلًا تسعة منهم يستخدمون يدهم اليسرى للكتابة، وتضم أيضًا ٨٥ أنثى لا يستخدمن اليد اليسرى. إذا اختير ستة أشخاص من المجموعة عشوائيًا، فأوجِد احتمال أن يكون أربعة منهم يستخدمون اليد اليسرى أو إناثًا.

٧) في مكتبة صغيرة ١٢٤٠ كتابًا مقسمة إلى: ٤٧٨ رواية ويرمز إليها (س)، منها ٣١٢ رواية مجلدة بغلاف صلب ويرمز إليها (ص)، ويوجد أيضًا ٤٤٠ كتابًا مجلدًا بغلاف غير صلب. بعض هذه المعلومات مبيّن على مخطط ڤن.



أ أوجِد قيمة كلٍّ من: أ، ب، ج.



ب اختير ٢٥ كتابًا عشوائيًا ليتم التبرع بها إلى جمعية خيرية، وتأمل الجمعية أن يكون من بينها على الأقل ٢٢ رواية أو كتابًا مجلدًا بغلاف صلب. احسب احتمال أن تحصل الجمعية الخيرية على ما تأمل.

٩-٢ المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)

عندما نشتري صندوق مانجو يتسع ٦ حبات، فقد يكون عددٌ منها فاسدًا، لذلك قد تأخذ عدد الحبات الفاسدة القيم ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

نلاحظ أن هذه القيم محددة وقابلة للعد، ويمكن أن نرمز إليها بالرمز (س)، حيث س ∋ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، كذلك على سبيل المثال، إذا رمينا أربعة أحجار نرد عادية فإن عدد مرات الحصول على العدد ٦ يمثل متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا نرمز إليه بالرمز (س)، حيث س ∋ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}.

تعطي المواقف التي يمكن اختيارها دون إعادة **متغيرات عشوائية منفصلة**. على سبيل المثال، إذا اخترنا عشوائيًا ثلاثة أطفال من مجموعة تتضمّن أربعة أولاد وبنتَين، عندها نسمي عدد الأولاد الذين تم اختيارهم متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا، ونرمز إليه (و)، حيث و ∋ {١، ٢، ٣ }، وكذلك نسمي عدد البنات اللاتي تم اختيارهن متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا، ونرمز إليه (ب)، حيث ب ∋ {٠، ١، ٢}.

مُساعَدة

إذا أمكن للمتغير (س) أن يأخذ قيمًا محددة وقابلة للعد يسمى متغيرًا عشوائيًا منفصلًا.

التوزيع الاحتمالي

التوزيع الاحتمالي probability distribution لمتغيّر عشوائي منفصل هو عرض جميع قيم المتغيّر العشوائي الممكنة مع الاحتمالات المناظرة لها، وطريقة العرض المعتادة هي جداول التوزيع الاحتمالي.

افترض أنك رميت قطعتَي نقد منتظمتَين، فيكون عدد الصور التي يمكن الحصول عليها هو ٠، ١، ٢

وبالتالي يكون عدد الصور الناتجة تمثل متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا نرمز إليه بالرمز (س)، حيث س ∋ {٠، ١، ٢}.

ل(س = ٠) = ل(كتابة و كتابة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

ل(س = ١) = ل(صورة و كتابة) + ل(كتابة و صورة) = (٠,٥ × ٠,٥) + (٠,٥ × ٠,٥) = ٠,٥

ل(س = ٢) = ل(صورة و صورة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س):

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٢٥	٠,٥	٠,٢٥

احتمالات قيم المتغيّر (س) الممكنة تساوي التكرارات النسبية للقيم. نتوقع أن ٢٥٪ من النتائج تعطي صفر صورة، ٥٠٪ يكون الناتج صورة واحدة، ٢٥٪ يكون الناتج صورتَين.

مُساعَدة

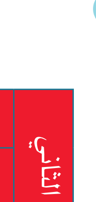
النواتج الممكنة لتجربة رمي قطعتَي نقد معدنية منتظمتين هي:
(صورة ، صورة)
(صورة ، كتابة)
(كتابة ، صورة)
(كتابة ، كتابة)

نتيجة ٢

التوزيع الاحتمالي يبيّن جميع قيم المتغير العشوائي المنفصل (س) الممكنة، وأن مجموع الاحتمالات $\sum$ ل (س) = ١

مثـال ٤

تم تدوير القرص المقابل مرتين.
عرّف المتغير العشوائي (س) على أنه مجموع الرقمين اللذين يقف عندهما المؤشر.



أ كوّن مخطط الفضاء الاحتمالي للمتغير (س)
ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س)

الحـلّ:

أ

		الدوران الأول			
		١	٢	٣	٤
الدوران الثاني	١	٢	٣	٤	٥
	٢	٣	٤	٥	٦
	٣	٤	٥	٦	٧
	٤	٥	٦	٧	٨

تبيّن شبكة المربعات ١٦ ناتجًا محتملًا لها فرصة الحدوث نفسها للمتغير العشوائي المنفصل (س)، حيث س ∈ {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}.

ب

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	المجموع = ١

يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

مُساعَدة: ل(س) هو التكرار النسبي لكل قيمة من قيم المتغيّر العشوائي (س).

مُساعَدة: لاحظ أن ∑ ل (س) = ١

مثـال ٥

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ف):

ف	٢	٣	٤	٥	٦
ل(ف)	٠,٠٥	ج^{٢}	ج + ٠,١	٢ج + ٠,٠٥	٠,١٦

أوجِد:

أ قيمة الثابت ج   ب ل(ف > ٤) .

الحـلّ:

أ ٠,٠٥ + ج^{٢} + ج + ٠,١ + ٢ج + ٠,٠٥ + ٠,١٦ = ١
ج^{٢} + ٣ج − ٠,٦٤ = ٠
(ج − ٠,٢)(ج + ٣,٢) = ٠

استخدم ∑ ل (ف) = ١ وحل المعادلة لتجد قيمة ج.

ج = ٠,٢ أو ج = −٣,٢ (مرفوضة)
الحل المقبول هو ج = ٠,٢

لاحظ أنه إذا كان ج = −٣,٢ فإن
ل(ف = ٣) = ١٠,٢٤
ل(ف = ٤) = −٣,١
ل(ف = ٥) = −٦,٣٥

ب ل(ف > ٤) = ل(ف = ٥) + ل(ف = ٦)
= (٢ × ٠,٢) + ٠,٠٥ + ٠,١٦
= ٠,٦١

مُساعَدة: تحقق ممّا إذا كانت الحلول مقبولة. تذكّر أن الاحتمال ٠ ≤ ل (ف) ≤ ١

مثــال ٦

يرغب ثمانية يافعين، ورجل واحد، وامرأة واحدة في ركوب حافلة، حيث توجد ٣ مقاعد شاغرة.

قرر السائق اختيار ٣ منهم عشوائيًا للصعود إلى الحافلة.

أنشئ جدول توزيع احتمالي للمتغيّر (ص) الذي يمثل 'عدد اليافعين المختارين'.

الحـلّ:

الاختيار تمّ دون إعادة، وهذا يعطي متغيرًا عشوائيًا منفصلًا، ولأن الترتيب هنا غير مهم، لذا نستخدم التوافيق لنجد ل(ص).

قيم المتغيّر (ص) الممكنة هي ١، ٢، ٣ ...... على الأقل سيتم اختيار واحد من اليافعين لأنه يوجد فقط اثنان من غير اليافعين.

عدد النواتج الممكنة: $\binom{١٠}{٣}$ ...... اختيار ثلاثة من ١٠ أشخاص.

ل(ص = ١) = $\frac{\binom{٨}{١} \times \binom{٢}{٢}}{\binom{١٠}{٣}} = \frac{١}{١٥}$ ...... اختيار واحد من ٨ يافعين (ص) واثنَين من غير اليافعين.

ل(ص = ٢) = $\frac{\binom{٨}{٢} \times \binom{٢}{١}}{\binom{١٠}{٣}} = \frac{٧}{١٥}$ ...... اختيار اثنَين من ٨ يافعين (ص) وواحد من غير اليافعين.

ل(ص = ٣) = $\frac{\binom{٨}{٣} \times \binom{٢}{٠}}{\binom{١٠}{٣}} = \frac{٧}{١٥}$ ...... اختيار ثلاثة من ٨ يافعين (ص) ولم يتم اختيار أحد من غير اليافعين.

ص	١	٢	٣
ل(ص)	$\frac{١}{١٥}$	$\frac{٧}{١٥}$	$\frac{٧}{١٥}$

...... يمثل الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (ص).

تمارين ٩-٢

١) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س):

س	٢	٣	٤	٥
ل (س)	ب	٢ب	$\frac{١}{٢}$ب	٣ب



أ أوجِد قيمة ب


ب احسب ل(٢ < س < ٥).


٢) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ح):

ح	٣	٦	٩	١٢	١٥
ل (ح)	٢ك	ك^{٢}	$\frac{ك}{٢}$	$\frac{٤}{٥}$ − ٣ك	$\frac{١٣}{٥٠}$

أ اكتب معادلة بدلالة **ك** ثم حلها.

ب لماذا حلّ واحد فقط من حلولك مقبول؟ اشرح إجابتك.

ج أوجِد ل (٦ ≤ ح < ١٠).

٣) في مباراة كرة السلة احتمال أن ينجح غانم في تسجيل كل هدف يساوي $\frac{٧}{٩}$، إذا نفّذ محاولتَين، حيث المتغيّر العشوائي المنفصل (س) يمثل 'عدد مرات تسجيل هدف':

أ بيّن أن ل(س = ٠) = $\frac{٤}{٨١}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)

٤) رُمي حجر نرد منتظم مرتَين له ٤ أوجه مرقمة بالأرقام ١، ٢، ٣، ٥ إذا عرف المتغيّر العشوائي (س) بأنه مجموع العددَين الظاهرَين على وجهَي الحجرَين.

أ بيّن أن ل (س = ٨) = $\frac{١}{٨}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)، ثم أوجِد ل (س > ٦).

٥) (ق) متغيّر عشوائي منفصل، حيث ق ∈ {٣، ٤، ٥، ٦}.

أ إذا علمت أن ل (ق) = ج ق^{٢}، فأوجِد قيمة العدد الثابت ج.

ب أوجِد ل (ق > ٤).

٦) اختير أربعة كتب عشوائيًا من صندوق يحتوي على ١٠ روايات، و ١٠ مراجع، و ٥ قواميس. يمثل المتغيّر العشوائي (ن) عدد الروايات التي تمّ اختيارها.

أ أوجِد قيمة ل(ن = ٢) لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

ب حدّد أيّهما أكثر إمكانية للحدوث ن = ٠ أم ن = ٤، وبرّر إجابتك.

٧) في لعبة تدوير قرص منتظم له أربعة أجزاء مرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢، ٣، إذا دوّر لاعب القرص وظهر العدد ١ أو ٢ أو ٣ فتكون هي درجته. وإذا ظهر العدد (٠) عندها يدوّر اللاعب قرصًا منتظمًا، أجزاؤه الثلاثة مرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢ وتكون درجته هو العدد الذي يظهر نتيجة التدوير. المتغيّر (س) يمثل درجة اللاعب.

أ بيّن أن ل (س = ٠) = $\frac{١}{١٢}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)، ثم أوجِد احتمال أن تكون قيمة س عددًا أوليًا.

٨) المتغيّر العشوائي المنفصل (ر)، حيث ر ∈ {١، ٣، ٥، ٧}.

أ إذا علمت أن ل (ر) = $\frac{ك(ر + ١)}{ر + ٢}$ ، فأوجِد قيمة العدد الثابت ك

ب أوجِد ل (ر ⩾ ٤).

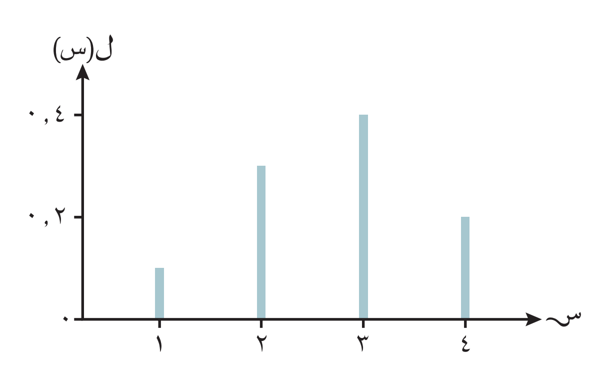
٩-٣ القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

قيم المتغيّر العشوائي المنفصل ذو الاحتمالات المرتفعة يتوقع حدوثها أكثر من تلك التي قيم احتمالاتها منخفضة، وكذلك عندما يُجرى عدد من التجارب فإنه ينتج توزيع تكراري للقيم له وسط حسابي (قيمة متوقعة).

القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي)

يطلق على الوسط الحسابي للمتغيّر العشوائي المنفصل (س) بالقيمة المتوقعة، ويرمز إليه بـ ت(س). افترض أن لديك قرصًا دوّارًا غير منتظم مرقمًا بالأرقام ١، ٢، ٣، ٤ وكانت احتمالات قيم (س) معطاة في الجدول وممثلة بيانيًا كالآتي:

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢



بغضّ النظر عن عدد دورات القرص، فإننا يمكن أن نتوقع النتيجة ١ في ١٠٪ من الدورات، والنتيجة ٢ في ٣٠٪ منها، والنتيجة ٣ في ٤٠٪ منها، والنتيجة ٤ في ٢٠٪.

التكرارات المتوقعة للدرجات من ١٦٠٠ تجربة مبيّنة في الجدول الآتي:

س	١	٢	٣	٤
التكرار المتوقع (ك)	٠,١ × ١٦٠٠ = ١٦٠	٠,٣ × ١٦٠٠ = ٤٨٠	٠,٤ × ١٦٠٠ = ٦٤٠	٠,٢ × ١٦٠٠ = ٣٢٠

مُساعَدة

يمكننا التفكير في القيمة المتوقعة ت (س) على أنها المتوسط لقيم (س) بعد إجراء عدد كبير من المحاولات.

من جدول التكرار المتوقع يمكنك أن تحسب الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) للدرجات بعد ١٦٠٠ تجربة.

الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) = ت (س) = $\frac{\sum \text{س ك}}{\sum \text{ك}}$

$= \frac{(١ \times ١٦٠) + (٢ \times ٤٨٠) + (٣ \times ٦٤٠) + (٤ \times ٣٢٠)}{١٦٠٠} = ٢,٧$

نحصل على القيمة نفسها للقيمة المتوقعة ت (س) إذا استخدمت التكرارات النسبية (الاحتمالات) بدلًا من التكرارات.

مُساعَدة

لاحظ أن:
$\sum$ ل(س) = ١

الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) = ت (س) = $\frac{\sum \text{س ل (س)}}{\sum \text{ل (س)}}$

$= \frac{(١ \times ٠,١) + (٢ \times ٠,٣) + (٣ \times ٠,٤) + (٤ \times ٠,٢)}{١} = ٢,٧$

نتيجة ٣

القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي منفصل (س) هي: ت (س) = ∑ س ل (س)،
حيث ٠ ⩽ ل (س) ⩽ ١

استكشف ١

لدى كل من عدنان وبدر حقيبة تحتوي على ٥ بطاقات مرقمة بالأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥

اختار كل منهما في الوقت نفسه بطاقة من حقيبته عشوائيًا، ووضعها مفتوحة على الطاولة. المتغيّر العشوائي (س) هو الفرق المطلق بين الأعداد الظاهره على بطاقتَيهما فيكون س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}. كرّرا التجربة ٢٠٠ مرة واستخدما النتائج لإنشاء جدول توزيع تكراري للمتغيّر (س).

اقترح عدنان تجربة أخرى لها المسار السابق نفسه، فضلًا عن أن كلًا من عدنان وبدر يمكنه اختيار البطاقة التي يريد وضعها على الطاولة ولا يمكنه رؤية بطاقة الآخر. يقول عدنان إن التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س) سيكون مختلفًا لأن البطاقتَين لم يتم اختيارهما عشوائيًا. لم يوافق بدر على ما قاله عدنان، ويقول إن التوزيع سيكون مشابهًا جدًا، أو قد يكون هو نفسه بالضبط.

هل تتفق مع عدنان أم مع بدر؟ برر إجابتك.

التباين

التباين والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي منفصل هما مقياسان لانتشار القيم حول الوسط الحسابي (ت (س))، يمكن حساب هذَين المقياسَين كما قمنا بإيجاد القيمة المتوقعة بدلالة الاحتمالات بدلًا من التكرارات.

إذا اعتمدنا ل (س) بدلًا من ك (التكرار)، و ت (س) بدلًا من $\overline{س}$ في صيغة التباين

$$\frac{\sum س^2 ك}{\sum ك} - \overline{س}^2$$

فنحصل على $\frac{\sum س^2 ل(س)}{\sum ل(س)} - (ت(س))^2$، ويمكن تبسيطها إلى $\sum س^2 ل(س) - (ت(س))^2$

لأن ∑ ل (س) = ١

تذكير

الانحراف المعياري = $\sqrt{التباين}$

نتيجة ٤

تباين المتغيّر العشوائي المنفصل (س) هو $ع^2(س) = \sum س^2 ل(س) - (ت(س))^2$ حيث ت (س) التوقع للمتغير العشوائي و ل (س) احتمال حدوثه (التكرار النسبي)

مثال ٧

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س). أوجِد القيمة المتوقعة، والتباين والانحراف المعياري للمتغيّر (س):

س	٠	٥	١٥	٢٠
ل (س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$



الحلّ:

$ت(س) = \left(٠ \times \frac{١}{١٢}\right) + \left(٥ \times \frac{٣}{١٢}\right) + \left(١٥ \times \frac{٥}{١٢}\right) + \left(٢٠ \times \frac{٣}{١٢}\right)$ عوّض قيم س و ل (س) في الصيغة ت(س) = ∑س ل (س).

$= \frac{١}{١٢} \times \left((٠ \times ١) + (٥ \times ٣) + (١٥ \times ٥) + (٢٠ \times ٣)\right)$

$= \frac{١}{١٢} \times ١٥٠$

$= ١٢,٥$

$ع^٢(س) = \left[\left(٠^٢ \times \frac{١}{١٢}\right) + \left(٥^٢ \times \frac{٣}{١٢}\right) + \left(١٥^٢ \times \frac{٥}{١٢}\right) + \left(٢٠^٢ \times \frac{٣}{١٢}\right)\right] - (١٢,٥)^٢$ عوّض في صيغة $ع^٢$ (س) لإيجاد التباين.

$= ٢٠٠ - ١٥٦,٢٥$

$= ٤٣,٧٥$

$ع(س) = \sqrt{٤٣,٧٥} = ٦,٦١$ خذ الجذر التربيعي للتباين لإيجاد الانحراف المعياري.

تمارين ٩-٣

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ص):

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل (ص)	٠,٠٣	٢م	٠,٣٢	م	٠,٠٥

أ أوجِد قيمة م.

ب احسب كلًا من: ت (ص)، $ع^٢$ (ص).

٢) (ح) متغيّر العشوائي حيث ح ∋ {١، ٣، ٦، ١٠}. إذا علمت أن احتمالية حدوث قيم ح متساوية، فأوجِد ت (ح)، $ع^٢$ (ح).

٣) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ف):

ف	١	٣	٩	م
ل (ف)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا علمت أن ت (ف) = ٥,٣٨، فأوجد قيمة كلٍّ من: م، ع^{٢} (ف).

٤) (ر) متغيّر عشوائي حيث ر ∈ {١٠، ٢٠، ٧٠، ١٠٠}. إذا علمت أن ل (ر) تتناسب مع قيم (ر)، فبيّن أن ت (ر) = ٧٧ ثم أوجد ع^{٢} (ر).

٥) رُمي حجرا نرد منتظمَين. المتغيّر العشوائي المنفصل (س) هو المضاعف المشترك الأصغر للعددَين الظاهرَين على حجرَي النرد.

أ أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

ب أوجِد ت (س)، ل (س > ت (س)).

ج احسب ع^{٢} (س).

٦) اختير طالبان عشوائيًا من صف جامعي يتألف من ١٢ طالبة و ١٨ طالبًا.

أ أوجِد القيمة المتوقعة لعدد الطالبات، والقيمة المتوقعة لعدد الطلاب.

ب اكتب نسبة القيمة المتوقعة لعدد الطالبات إلى القيمة المتوقعة لعدد الطلبة في أبسط صورة. ماذا تلاحظ على هذه النسبة؟

ج احسب التباين لعدد الطالبات المختارات.

٧) تحتوي سلة على ٨ بكرات قطن: ٤ منها خُضر، و٣ حُمر، وواحدة صفراء. اختيرت ٣ بكرات قطن عشوائيًا من السلة.

أ بيّن أن القيمة المتوقعة للبكرة الصفراء هي ٠,٣٧٥

ب أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الحُمر.

ج أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر.

٨) رُمي حجر نرد، إذا ظهر على وجه حجر النرد عدد فردي يحصل اللاعب على درجة (س) تساوي ذلك العدد، وإذا ظهر عدد زوجي يُعيد اللاعب رمي حجر النرد:

- إذا ظهر عدد فردي في الرمية الثانية يحصل اللاعب على درجة تساوي ذلك العدد.
- إذا ظهر في الرمية الثانية عدد زوجي يحصل اللاعب على درجة تساوي نصف ذلك العدد الزوجي.



أ سجّل قيم (س) الممكنة وأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي له.

ب أوجِد ل (س > ت (س)).

ج احسب قيمة ع^{٢} (س).

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يأخذ المتغيّر العشوائي المنفصل قيمًا محددة وقابلة للعد.
- التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المنفصل هو عرض لجميع القيم الممكنة واحتمالاتها المناظرة.
- 
للمتغيّر العشوائي المنفصل (س)، حيث ٠ $\leqslant$ ل(س) $\leqslant$ ١ يكون:
    - $\sum$ ل(س) = ١
    - ت(س) = $\sum$ س ل(س)
    - ع^{٢}(س) = $\sum$ س^{٢} ل(س) − (ت(س))^{٢}
    - ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^{٢}\text{(س)}}$



تمارين مراجعة نهاية الوَحدة التاسعة

١) أوجِد الوسط الحسابي، والتباين للمتغيّر العشوائي المنفصل (س) الذي توزيعه الاحتمالي مُعطى في الجدول الآتي:

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	١ − ر	٢ − ٣ر	٣ − ٤ر	٤ − ٦ر



٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (ص):

ص	١	١٠	م	١٠١
ل (ص)	٠,٢	٠,٤	٠,٢	٠,٢

أ إذا علمت أن ع^{٢}(ص) = ١٣٨٥,٢، فبيّن أن م^{٢} − ٦١م + ٦٢٤ = ٠، وحل المعادلة.

ب أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ ت (ص).

٣) يبيّن الجدول الآتي احتمالات نسب الربح المئوية المختلفة لاستثمارات شركة ما خلال ٣ سنوات.

نسبة الربح ٪	١	٥	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٤٠	٤٥	٥٠
ل (ص)	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٥٠	٠,٢٠	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١

أ احسب الربح المتوقع على استثمار بقيمة ٥٠٠٠٠ ريال عُماني.

ب تستثمر امرأة مبلغ ٥٠٠٠٠ ريال عُماني مع الشركة، لكنها تتوقع أنها ستحقق ربحًا أكثر بالفترة الزمنية نفسها إذا وضعت نقودها في حساب ودائع يعطي فائدة مركبة ر ٪ سنويًا. احسب لأقرب منزلتَين عشريتَين أقل قيمة ممكنة للفائدة (ر).



مُساعَدة

الفائدة المركبة ر٪ في السنة تعني ضرب المبلغ السابق في $١ + \frac{ر}{١٠٠}$ لإيجاد القيمة الجديدة بعد ن سنة، يمكننا الضرب في $(١ + \frac{ر}{١٠٠})^{ن}$